圓錐曲線切線的尺規作圖

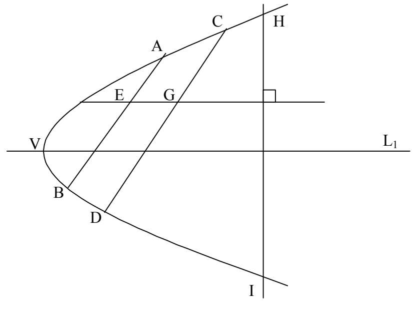
劉紹正
臺北市立內湖高級中學

一、前言：

討論圓錐曲線時，經常會探討其切線的性質，爲了使討論的問題更清楚，常常必須畫圖以利彼此的溝通，但很少考慮如何以尺規精確作圖。進行尺規作圖首先要通澈瞭解主題的相關性質，再依據邏輯的先後順序，依次作圖，其在層次上屬於分析、綜合之上。於此，先給定一圓錐曲線，再以尺規作圖找出中心、對稱軸、焦點、切線等。需用到較爲複雜的性質時，則於作圖後加證明；若用到較爲明顯的性質時，則僅於作圖後略作說明。

二、拋物線

（一）作拋物線的對稱軸（如圖一）



圖一

1.任意作兩平行弦 $\overline{AB} // \overline{CD}$ 。

2.分別取 $\overline{AB},\overline{CD}$ 之中點，令其爲 E、G。

3.作直線 EG，此直線爲拋物線的直徑，故直線 EG 平行於對稱軸。

4.拋物線上取一點 H，作 $\overline{HI} \perp \overleftrightarrow{EG}$ ，交拋物線於另一點 I。作 $\overline{HI}$ 之中垂線 L_1，L_1 即爲對稱軸。

5.L_1 與拋物線的交點即爲頂點，設其爲 V。

【原理】拋物線上一組平行弦中點的集合爲一射線，此射線稱爲拋物線的一個直徑，直徑平行對稱軸。

【證明】

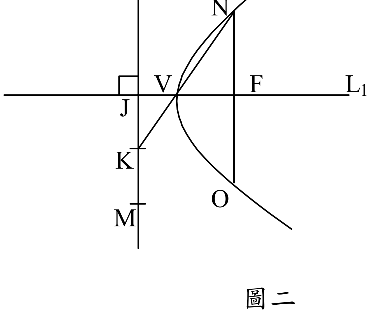
設拋物線爲 $y^2=4cx$，一弦 $\overline{AB}$ 所在的直線爲 $y=ax+b$，$a\neq 0$，則 $(ax+b)^2=4cx$，

$a^2x^2+(2ab-4c)c+b^2=0$，設弦 $\overline{AB}$ 的中點爲 $P(X,Y)$，由根與係數得 $X=\dfrac{2c-ab}{a^2}\cdots(*)$

又 $P(X,Y)$ 在直線 $y=ax+b$ 上，所以 $Y=aX+b$，將(*)代入得 $Y=\dfrac{2c}{a}$，

故直徑方程式爲 $y=\dfrac{2c}{a}$，與拋物線的對稱軸平行。

（二）作拋物線的焦點（如圖二）



圖二

1.在拋物線外作直線 $L_2 \perp L_1$，設垂足爲 J。

2. 在直線 L_2 上取兩點 K、M，使得 $\overline{JK}=\overline{KM}=\overline{JV}$ 。

3.作直線 MV，交拋物線於另一點 N。

4.作 $\overline{NO}\perp L_1$，且交 L_1 於點 F，F 即爲拋物線的焦點。

【原理】拋物線焦點到頂點的距離爲正焦弦長的 $\frac{1}{4}$ 。

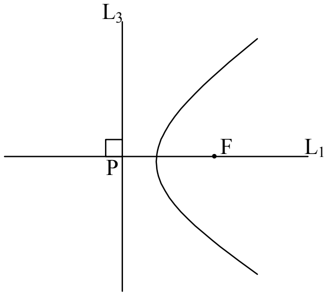
【證明】

依作圖 $\Delta VJM \sim \Delta VFN$ ，則

$\overline{VJ}:\overline{JM}=\overline{VF}:\overline{FN}=1:2$ ，

$\because$ 拋物線焦點至頂點的距離爲正焦弦長的 $\frac{1}{4}$ ，$\therefore$ 點 F 爲焦點。

（三）作拋物線的準線（如圖三）



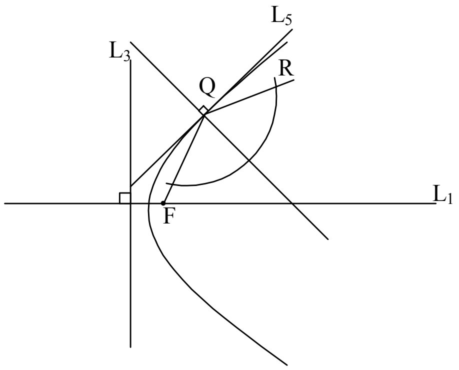
圖三

1.在 L_1 上取一點 P，使得 $\overline{VP}=\overline{VF}$ 。

2.過點 P 作直線 $L_3\perp L_1$，直線 L_3 即爲拋物線的準線。

【說明】拋物線頂點到焦點的距離等於頂點到準線的距離。

（四）過拋物線上一點作切線（如圖四）



圖四

1.設拋物線上一點 Q，作 $\overline{FQ}$ 。

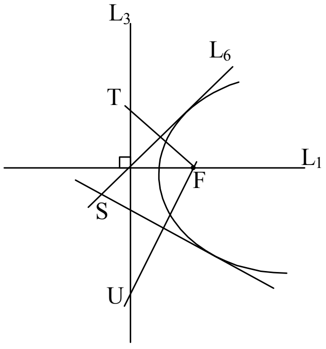
2.作直線 $QR//L_1$。

3.作 $\angle FQR$ 的平分線 L_4。

4.過點 Q 作直線 $L_5\perp L_4$，直線 L_5 即爲過點 Q 的切線。

【說明】直接運用拋物線的光學性質。

（五）過拋物線外一點作切線（如圖五A）



圖五A

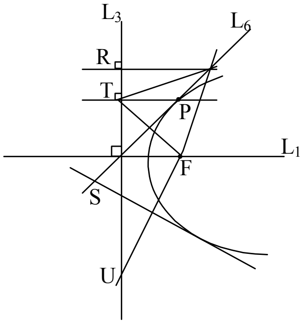
1.設拋物線外一點 S，在準線上取兩點 T、U，使得 $\overline{ST}=\overline{SU}=\overline{SF}$ 。

2.分別作 $\overline{TF},\overline{UF}$ 的中垂線 L_6、L_7，直線 L_6、L_7 即爲過點 S 的兩切線。

【原理】利用拋物線的定義，即拋物線上的

點到焦點的距離等於到準線的距離，以確定切點在拋物線上，同時利用一線段其中垂線上的點，到此線段兩端點的距離相等之性質，確定切線的位置。

【證明】（如圖五 B）



圖五B

（1）先證 L_6 不平行拋物線的對稱軸。設 $L_6 // L_1$，則 $\overline{TF} // L_3$，與 $T \in L_3$ 且 $F \notin L_3$ 不合。

（2）過點 T 作直線 $TP \perp L_3$ 且交 L_6 於點 P，$\because L_6$ 為 $\overline{TF}$ 的垂直平分線，$\therefore \overline{PT} = \overline{PF}$ 由拋物線的定義得知，點 P 在拋物線上。

（3）證明 L_6 與拋物線只有一個交點。

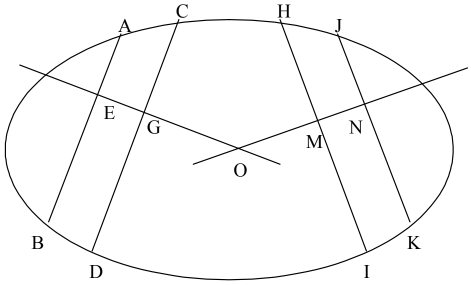
設 L_6 與拋物線交於點 P 和點 Q，且 $P \neq Q$，作 $\overline{QR} \perp L_3$，由拋物線之定義得知 $\overline{QR} = \overline{QF}$。

$\because L_6$ 為 $\overline{TF}$ 的垂直平分線，$\therefore \overline{QT} = \overline{QF}$，則 $\overline{QR} = \overline{QT}$，與 $\angle QRT$ 為直角不合。

由（1）、（2）、（3）得知，L_6 為拋物線的切線。

三、橢圓

（一）作橢圓的中心（如圖六）



圖六

1.任意作兩平行弦 $\overline{AB} // \overline{CD}$，分別取其中點 E、G。

2.任意作兩平行弦 $\overline{HI} // \overline{JK}$

$\overline{HI} // \overline{JK}$，但 $\overline{AB}$ 不平行 $\overline{HI}$，分別取其中點 M、N。

3.作直線 EG、MN，設其交於 O 點，此 O 點即為橢圓的中心。

【原理】橢圓之一組平行弦之中點所成的集合為一線段，此線段稱為橢圓的一個直徑，直徑必過橢圓的中心。

【證明】

設橢圓為 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，弦 $\overline{AB}$ 所在的直線方程式為 $y=mx+k$，

將 $y=mx+k$ 代入 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 中，

得 $(b^2+a^2m^2)x^2+2a^2mkx+a^2(k^2-b^2)=0$ 設 $\overline{AB}$ 的中點為 $P(X,Y)$，由根與係數得 $X=\frac{-mka^2}{a^2m^2+b^2} \cdots (*)$

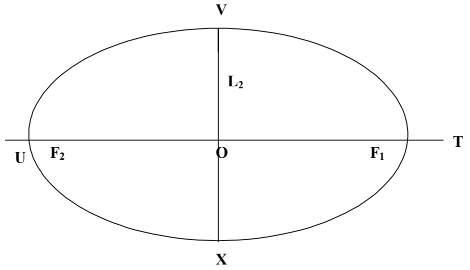
因點 $P(X,Y)$ 在 $y=mx+k$ 上，所以 $Y=mX+k \Rightarrow k=Y-mX$ 代入(*)中，得

$$X=\frac{-ma^2(Y-mX)}{a^2m^2+b^2},$$

化簡成$b^2X+ma^2Y=0$，

故直徑之方程式爲$b^2x+ma^2y=0$，過橢圓的中心*(0,0)*。

（二）作橢圓的長軸（如圖七）



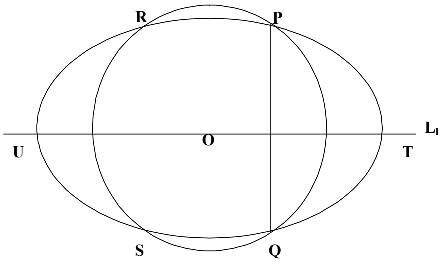
圖七

1.以中心 O 爲圓心，適當長爲半徑作圓，使此圓與橢圓交於四點 P、Q、R、S。

2.作$\overline{PQ}$的中垂線 L_1，L_1 交橢圓於 T、U 兩點，$\overline{TU}$ 即爲長軸。

【說明】若圓心與橢圓的中心重合時，利用圓關於直徑成對稱，且橢圓關於長軸成對稱的性質，圓垂直於弦$\overline{PQ}$的直徑可爲橢圓的長軸。

（三）作橢圓的短軸、焦點（如圖八）



圖八

1.過點 O 作直線 L_2，使 $L_1 \perp L_2$，L_2 交橢圓於兩點 V、X，$\overline{VX}$ 即爲短軸。

2.以 V 爲圓心，$\overline{OT}$ 爲半徑作弧，交橢圓於兩點 F_1、F_2，F_1、F_2 即爲橢圓的焦點。

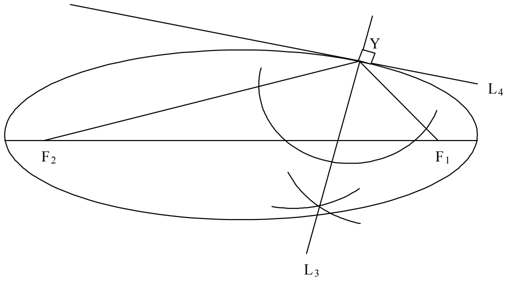
【證明】

由橢圓$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的基本關係式

$a^2=b^2+c^2$得知，

$\overline{OF_1}=\overline{OF_2}=c$，故點$F_1,F_2$爲焦點。

（四）過橢圓上一點作切線（如圖九）



圖九

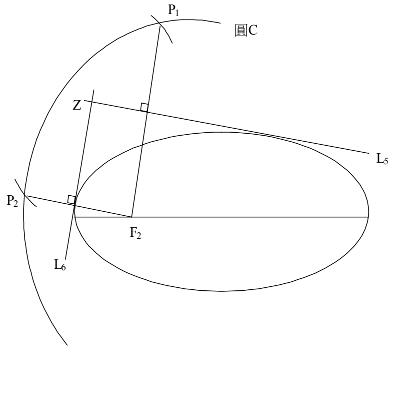
1.設 Y 爲橢圓上一點，作$\overline{YF_1},\overline{YF_2}$。

2.作$\angle F_1YF_2$的平分線 L_3。

3.作直線 $L_4 \perp L_3$，L_4 即爲過 Y 點的切線。

【說明】直接運用橢圓的光學性質。

（五）過橢圓外一點作切線（如圖十 A）



圖十A

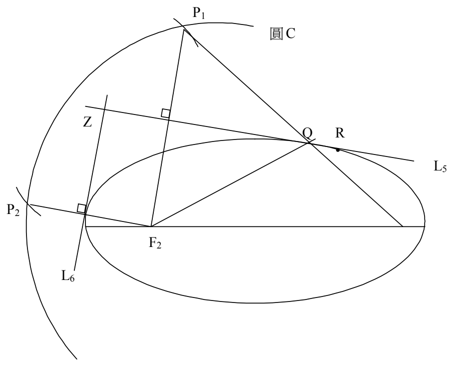
1.設點 Z 為橢圓外一點，以距離 Z 點較遠之焦點 F_1 為圓心，長軸長為半徑作圓 C。

2.以 Z 為圓心，$\overline{ZF_2}$ 為半徑作弧，交圓 C 於兩點 P_1、P_2。

3.作 $\overline{P_1F_2},\overline{P_2F_2}$ 的中垂線 L_5、L_6，直線 L_5、L_6 即為過點 Z 的切線。

【原理】利用橢圓的定義，即橢圓上的點到兩焦點距離的和等於長軸長，以確定切點在橢圓上，同時利用一線段其中垂線上的點，到此線段兩端點的距離相等之性質，確定切線的位置。

【證明】（如圖十 B）



圖十B

設 $\overline{P_1F_1}$ 交 L_5 於點 Q，

$\because L_5$ 為 $\overline{P_1F_2}$ 的中垂線 $\therefore \overline{QP_1}=\overline{QF_2}$ ，

$\overline{QF_1}+\overline{QF_2}=\overline{QF_1}+\overline{QP_1}=\overline{P_1F_1}=2a$

由橢圓之定義得知，點 Q 在橢圓上。

再證直線 L_5 與橢圓只有一個交點。設直線 L_5 交橢圓於另一點 R，$R\neq Q$，

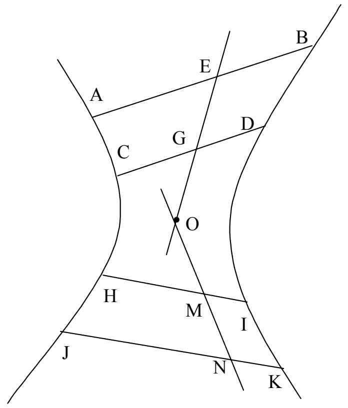
則 $2a=\overline{RF_1}+\overline{RF_2}=\overline{RF_1}+\overline{RP_1}>\overline{P_1F_1}=2a$ ，

矛盾。即直線 L_5 與橢圓只有一個交點。

由上可知，直線 L_5 為橢圓的切線。

四、雙曲線

（一）作雙曲線的中心（如圖十一）



圖十一

1.任意作兩平行弦 $\overline{AB}//\overline{CD}$ ，分別取其中點 E、G。

2.任意作兩平行弦 $\overline{HI}//\overline{JK}$ ，但 $\overline{AB}$ 不平行 $\overline{HI}$ ，分別取其中點 M、N。

3.作直線 EG、MN，設其交於 O 點，此 O 點即為雙曲線的中心。

【原理】雙曲線上平行弦中點的連線會通過中心。

【證明】

設雙曲線為 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ，

弦 $\overline{AB}$ 所在的直線方程式為 $y=mx+k$，

將 $y=mx+k$ 代入 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 中，

得 $(b^2-a^2m^2)x^2-2a^2mkx-a^2(k^2+b^2)=0$

設 $\overline{AB}$ 的中點為 $P(X,Y)$，

由根與係數得 $X=\dfrac{mka^2}{b^2-a^2m^2}\cdots(*)$

因點 $P(X,Y)$在 $y=mx+k$ 上，

所以 $Y=mX+k \Rightarrow k=Y-mX$ 代入(*)中，

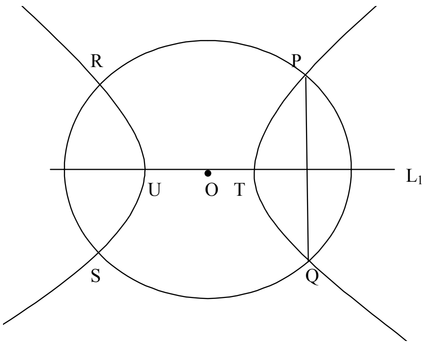
得 $X=\dfrac{ma^2(Y-mX)}{b^2-a^2m^2}$ ，

化簡成 $b^2X-ma^2Y=0$ ，

故弦中點所在的直線方程式爲

$b^2x-ma^2y=0$ ，過雙曲線的中心$(0,0)$。

（二）作雙曲線貫軸（如圖十二）



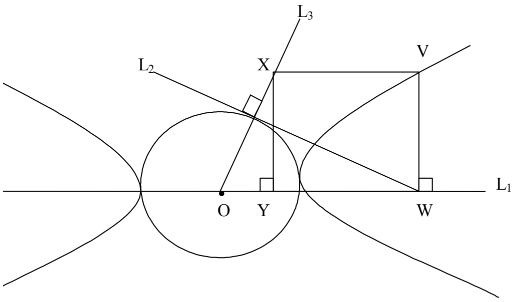
圖十二

1.以中心 O 爲圓心，適當長爲半徑作圓，使此圓與雙曲線交於四點 P、Q、R、S。

2.作 $\overline{PQ}$的中垂線 L_1，L_1 交雙曲線於 T、U 兩點，$\overline{TU}$ 即爲貫軸。

【說明】若圓心與雙曲線的中心重合時，利用圓關於直徑成對稱，且雙曲線關於貫軸成對稱的性質，圓垂直於弦 $\overline{PQ}$的直徑可爲雙曲線的貫軸。

（三）作雙曲線的共軛軸（如圖十三）



圖十三

1.以 O 爲圓心，半貫軸長 $\overline{OT}$ 爲半徑作圓 C。

2.過雙曲線上一點 V，作 $\overline{VW}\perp L_1$，且交 L_1 於 W。

3.過點 W 作圓 C 的切線 L_2。

4.過點 O 作直線 $L_3\perp L_2$。

5.過點 V 作 $\overline{VX}$ //L_1 且交 L_3於點 X。

6.過點 X 作 $\overline{XY}\perp L_1$ 且交 L_1於點 Y。

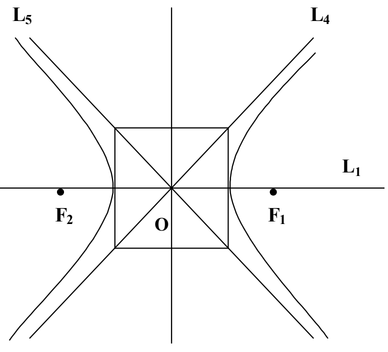
7.$\overline{OY}$ 長即爲共軛軸半長。

【證明】

設點 V 的坐標爲(α,β) ，$\angle XOY=\theta$ ，則依作圖可知$\alpha=\overline{OW}=a\sec\theta$ 由雙曲線的參數式得知，此時

$$\beta=\overline{XY}=b\tan\theta=b\frac{\overline{XY}}{\overline{OY}}\Rightarrow\overline{OY}=b$$ 。

（四）作雙曲線的焦點（如圖十四）



圖十四

1.以 O 為中心，分別以貫軸長 $2\overline{OT}$，共軛軸長 $2\overline{OY}$ 為長、寬作矩形。

2.矩形的對角線 L_4、L_5 為雙曲線的漸近線。

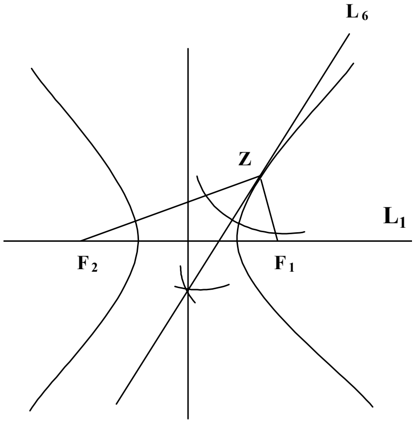
3.以 O 為圓心，矩形的對角線半長為半徑作弧，交 L 於 F_1、F_2 兩點，F_1、F_2 即為雙曲線的焦點。

【證明】

由雙曲線的基本關係式

$c^2 = a^2 + b^2$ 得知，$\overline{OF_1} = \overline{OF_2} = c$，故點 F_1, F_2 為雙曲線的焦點。

（五）過雙曲線上一點作切線（如圖十五）



圖十五

1.設雙曲線上一點 Z，作 $\overline{ZF_1}, \overline{ZF_2}$。

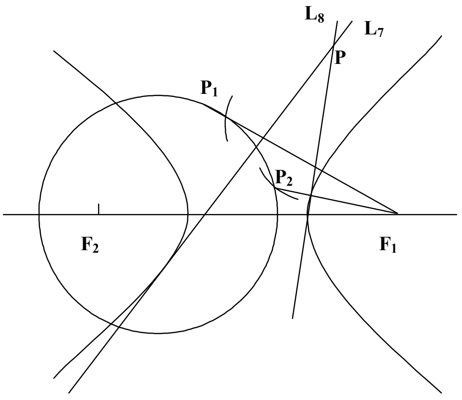
2.作 $\angle F_1ZF_2$ 的平分線 L_6，L_6 即為過點 Z 的切線。

【說明】直接運用雙曲線的光學性質。

（六）過雙曲線外一點作切線（如圖十六A）

1.設 P 為雙曲線外一點，以距離 P 較遠的焦點 F_2 為圓心，貫軸長為半徑作圓 C。

2.以 P 為圓心，$\overline{PF_1}$ 為半徑作弧，交圓 C 於 P_1、P_2 兩點。

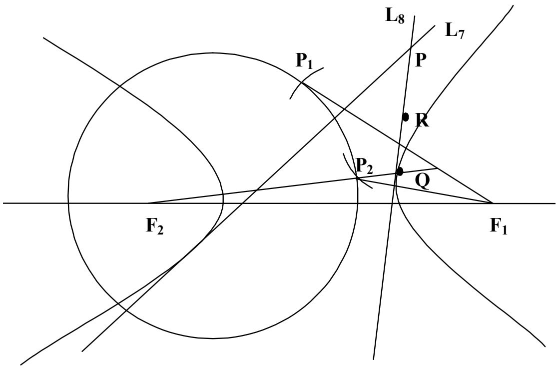


圖十六A

3.作 $\overline{P_1F_1}, \overline{P_2F_1}$ 的中垂線 L_7、L_8，直線 L_7、L_8 即為過點 P 之切線。

【原理】利用雙曲線的定義，即雙曲線上的點到兩焦點距離差的絕對值等於貫軸長，以確定切點在雙曲線上，同時利用一線段其中垂線上的點，到此線段兩端點的距離相等之性質，確定切線的位置。

【證明】（如圖十六 B）



圖十六B

作直線 F_2P_2 交直線 L_8 於點 Q，

$\because L_8$ 為 $\overline{P_2F_1}$ 的中垂線 $\therefore \overline{QP_2} = \overline{QF_1}$ ，

$\overline{QF_2} - \overline{QF_1} = \overline{QF_2} - \overline{QP_2} = \overline{P_2F_2} = 2a$ ，由雙曲線的定義得知，點 Q 在雙曲線上。

再證直線 L_8 與雙曲線只有一個交點。設 L_8 與雙曲線交於另一點 R，$R \neq Q$，

則 $2a = \overline{RF_2} - \overline{RF_1} = \overline{RF_2} - \overline{RP_2} < \overline{F_2P_2} = 2a$ ，

矛盾。即直線 L_8 與雙曲線只有一個交點。

由上可知，直線 L_8 為雙曲線的一切線。

五、結語

上述各項尺規作圖，用到了圓錐曲線的參數式及光學性質等，而光學性質在現在各版本的高中數學教科書中均有述及，於此為避免贅述，對這部分並未詳列。而這些尺規作圖的方法，亦可運用於電腦繪圖上，對觀察圓錐曲線的性質甚有助益。